



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



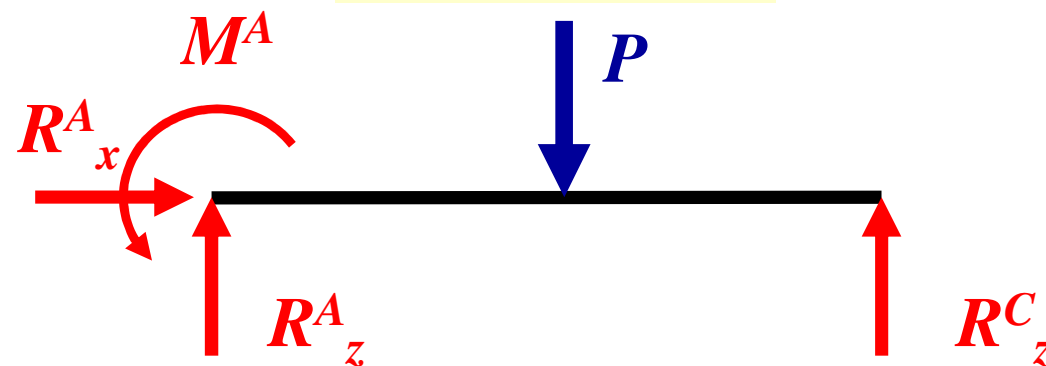
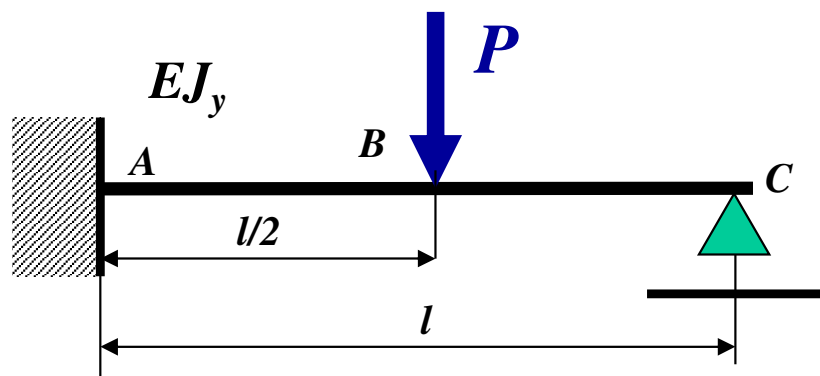
## Wykład 5

# Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

## Metoda sił Maxwella-Mohra

# Metoda sił Maxwella-Mohra

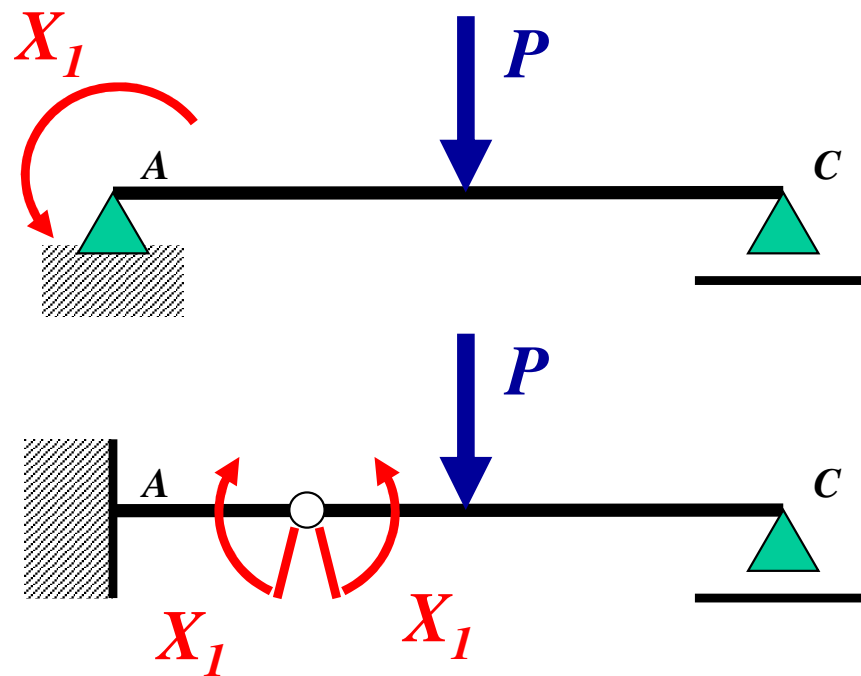
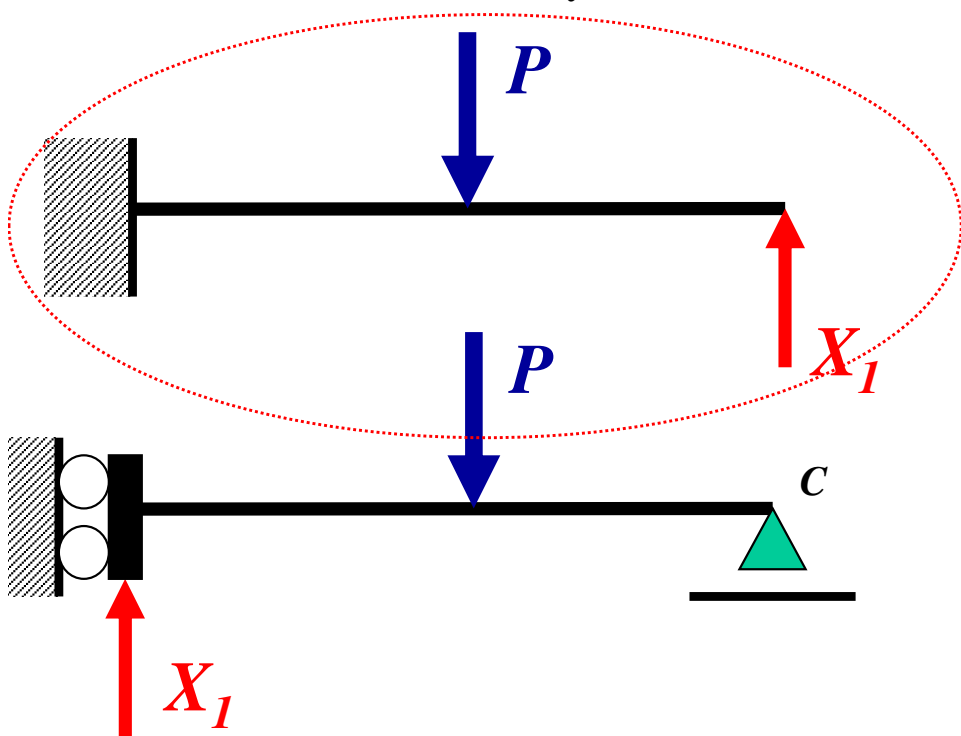
**Przykład:** Belka statycznie niewyznaczalna



**Zadanie statycznie niewyznaczalne: 4 reakcje – 3 równania = 1 kr. stat. niewyznaczalne**

Trzeba uwolnić jeden stopień swobody!

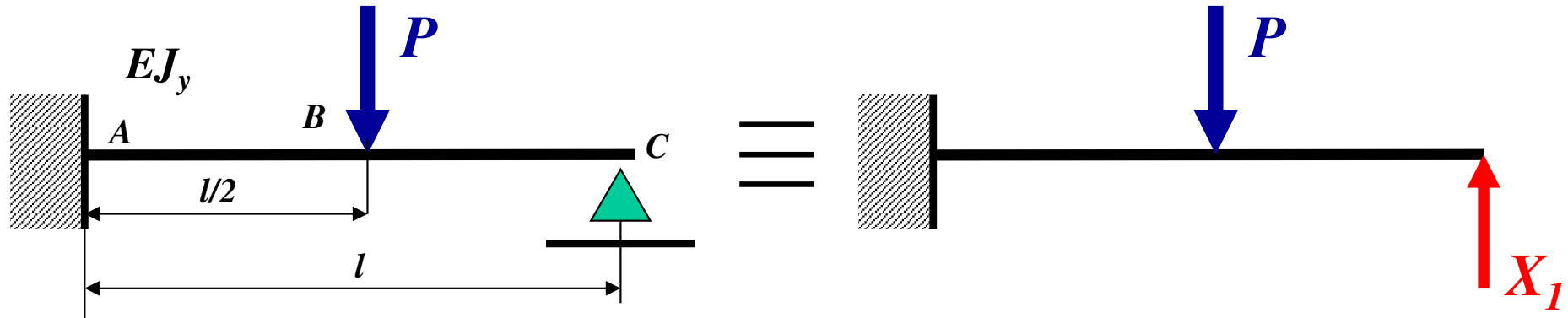
MOŻLIWE ZASTĘPCZE USTROJE RÓWNOWAŻNE STATYCZNIE WYZNACZALNE:



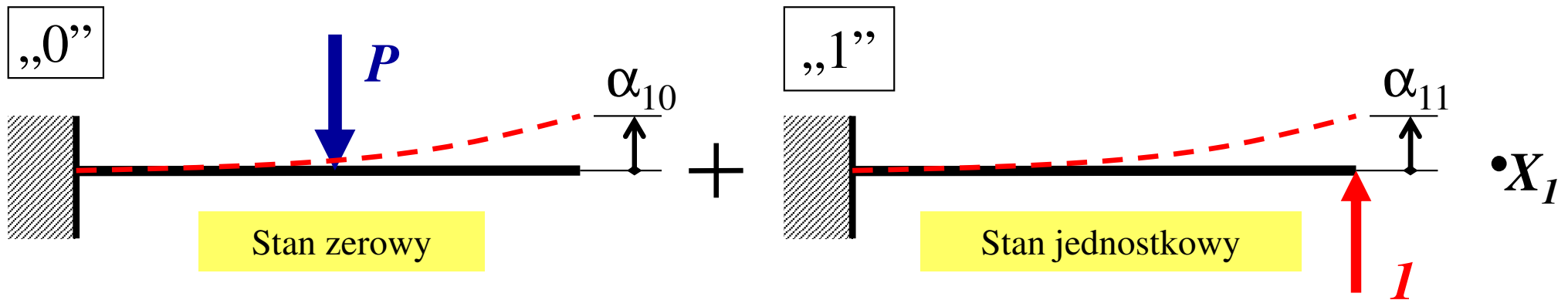
# Metoda sił Maxwella-Mohra

Belka 1 krotnie statycznie niewyznaczalna

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

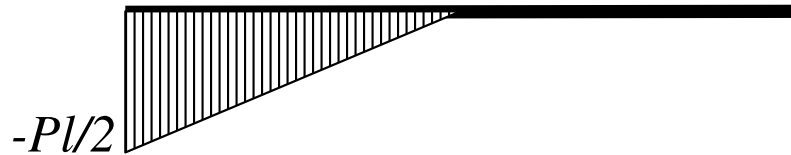


SUPERPOZYCJA DWÓCH STANÓW OBCIĄŻENIA:

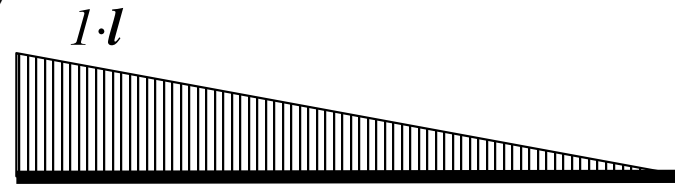


Rozkłady momentów gnących:

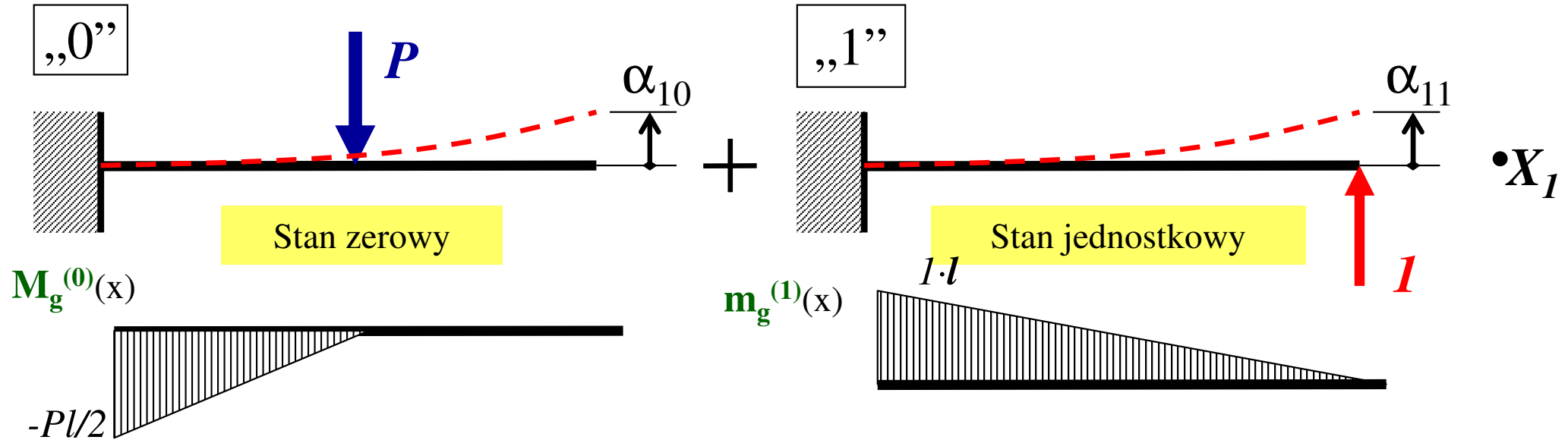
$M_g^{(0)}(x)$



$m_g^{(1)}(x)$



# Metoda sił Maxwella-Mohra



Ugięcie końca belki w stanie „0” →  $\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot M_g^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds$

**t.W.**  $= \frac{1}{EJ_y} \frac{-\frac{1}{2}Pl \cdot \frac{1}{2}l}{2} \cdot \frac{5}{6}l = -\frac{5Pl^3}{48EJ_y}$

Ugięcie końca belki w stanie „1” →  $\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot m_g^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds$

**t.W.**  $= \frac{1}{EJ_y} \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ_y}$

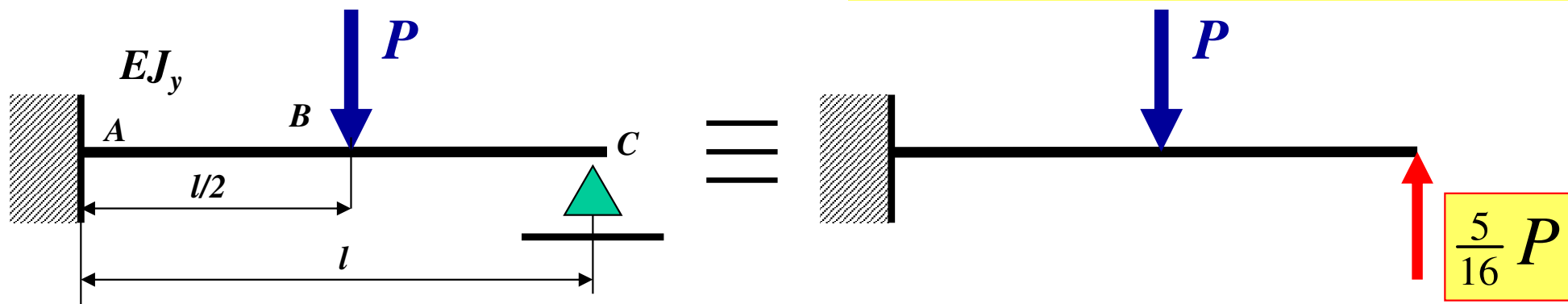
Warunek zerowego przemieszczenia na podporze:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{-\frac{5Pl^3}{48EJ_y}}{\frac{l^3}{3EJ_y}} = \frac{5}{16}P$$

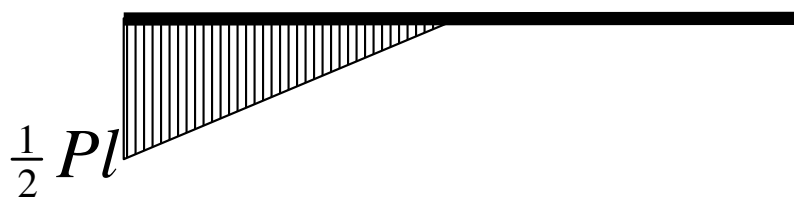
Równanie kanoniczne metody sił Maxwella-Mohra

# Metoda sił Maxwella-Mohra

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



$M_g^{(0)}(x)$

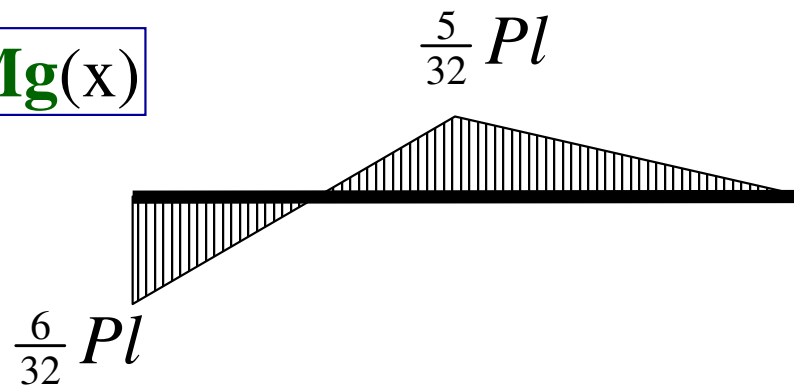


$\frac{5}{16}P \cdot m_g^{(1)}(x)$



Końcowy rozkład momentu gnącego:

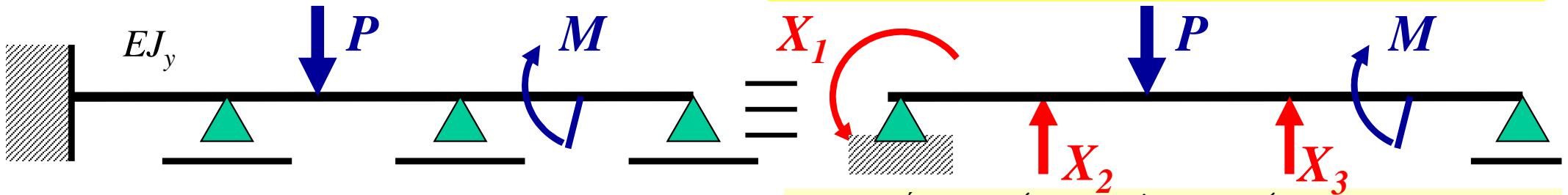
$M_g(x)$



# Uogólnienie metody sił Maxwella-Mohra

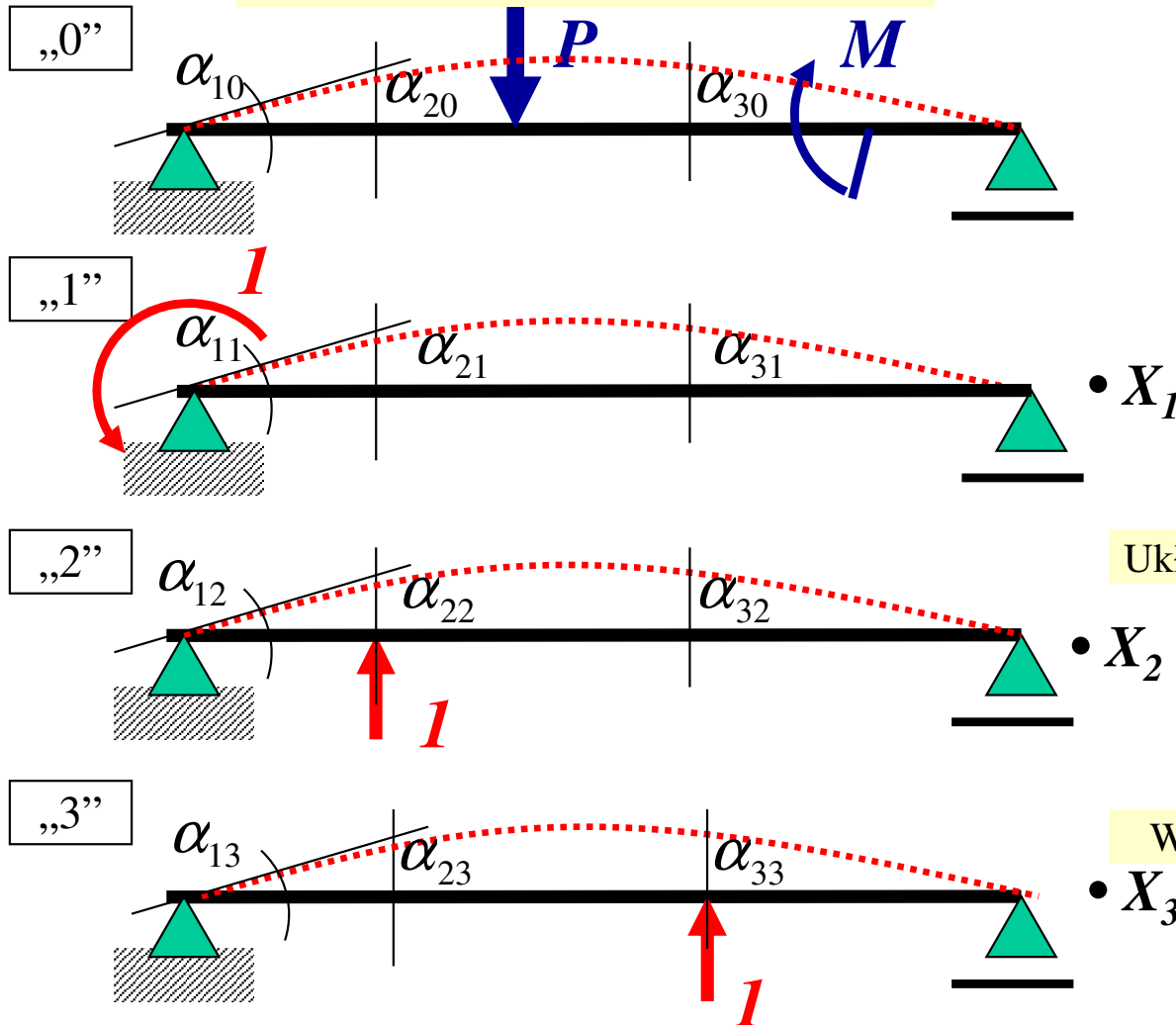
Konstrukcja statycznie niewyznaczalna →

6 reakcji – 3 równania = 3 krotnie stat. niewyznaczalna



WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZAST. STAT. WYZN.

SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 + \alpha_{13} \cdot X_3 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 + \alpha_{23} \cdot X_3 = 0$$

$$\alpha_{30} + \alpha_{31} \cdot X_1 + \alpha_{32} \cdot X_2 + \alpha_{33} \cdot X_3 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

$$\alpha_{ij} \cong \int_l \frac{m^{(i)} \cdot m^{(j)}}{EJ_y} \cdot ds$$

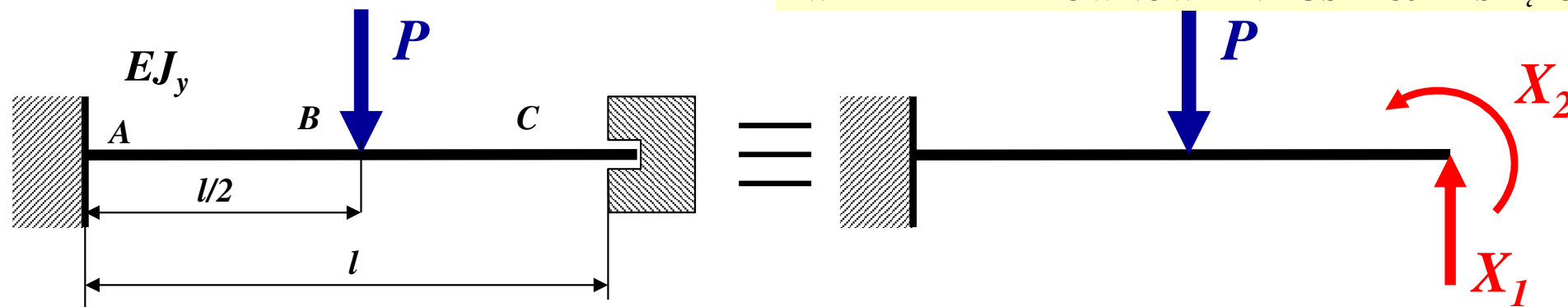
Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

# Metoda sił Maxwella-Mohra

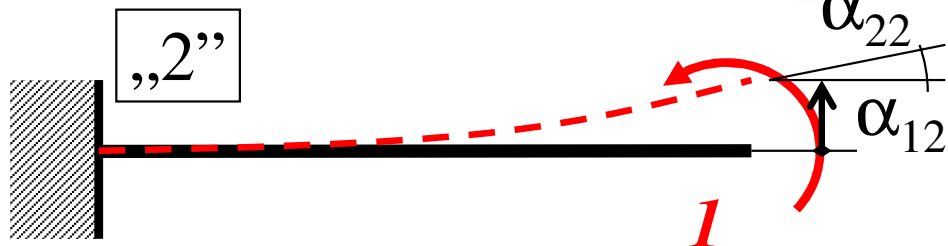
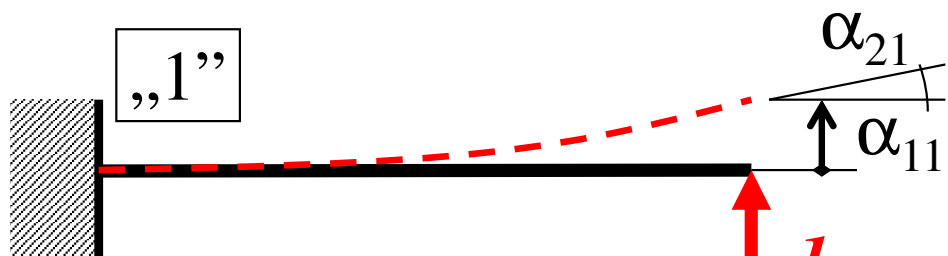
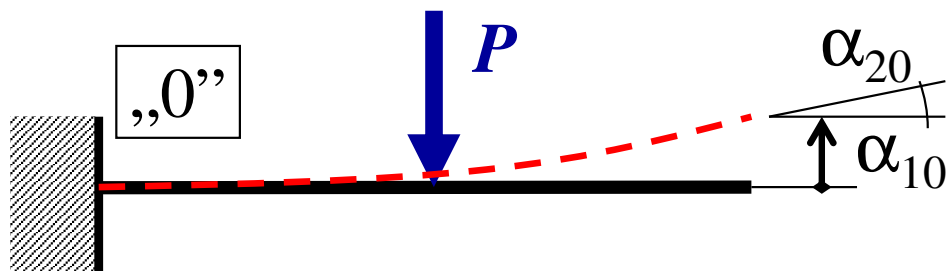
Zad.1. Belka 2 kr.stat. niewyznaczalna →

5 reakcji – 3 równania = 3 kr. stat. niewyzn.

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

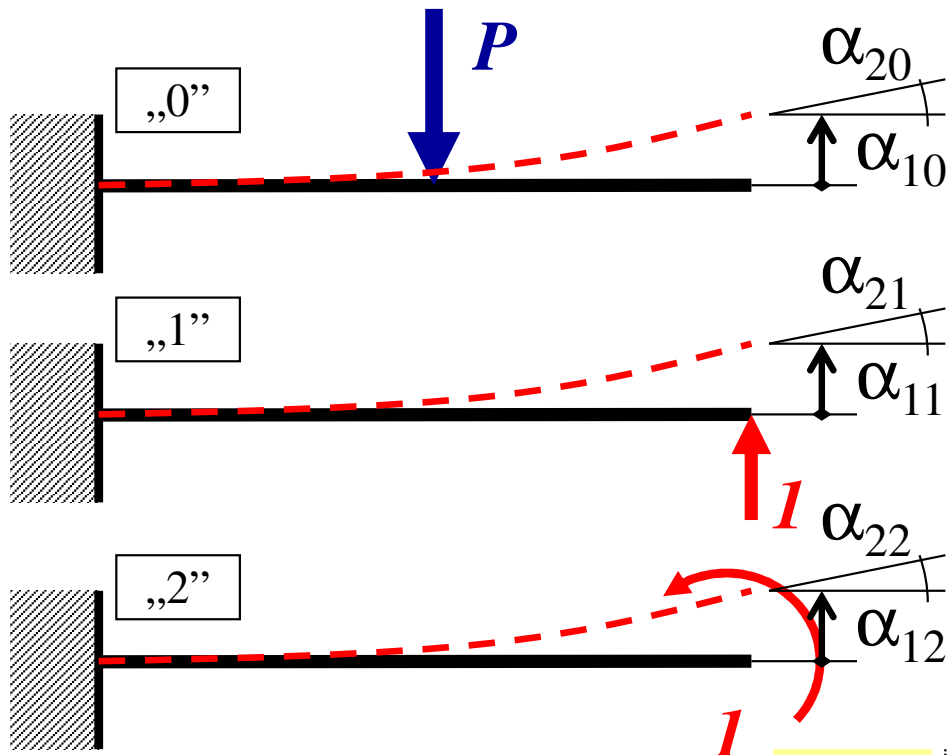
•  $X_1$

•  $X_2$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

# Metoda sił Maxwella-Mohra

SUPERPOZYCJA STANÓW:



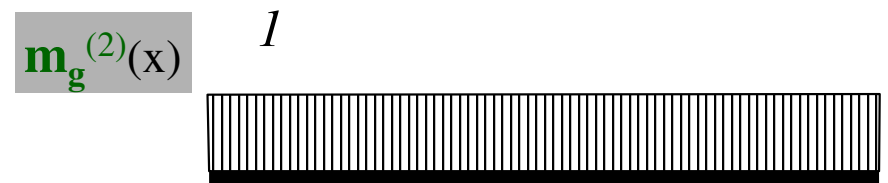
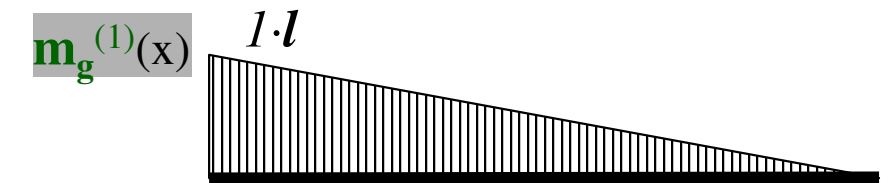
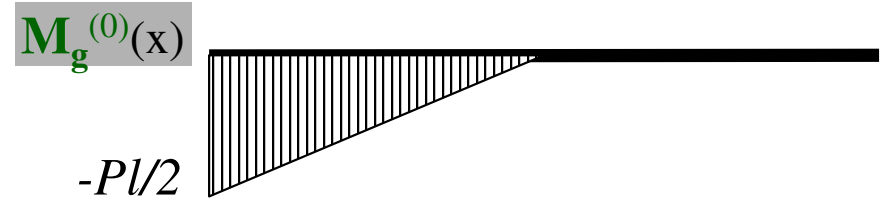
$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} l^2 \cdot 1 = \frac{l^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EJ_y}$$

Rozkłady momentów gnących:



$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} \left( \frac{-Pl}{2} \right) \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{6} l = \frac{-5Pl^3}{48EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} \left( \frac{-Pl}{2} \right) \frac{l}{2} \cdot 1 = \frac{-Pl^2}{8EJ_y}$$

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M



# Metoda sił Maxwella-Mohra

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M:

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{l^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{22} = \frac{l}{EJ_y}$$

$$\alpha_{10} = \frac{-5Pl^3}{48EJ_y}$$

$$\alpha_{20} = \frac{-Pl^2}{8EJ_y}$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

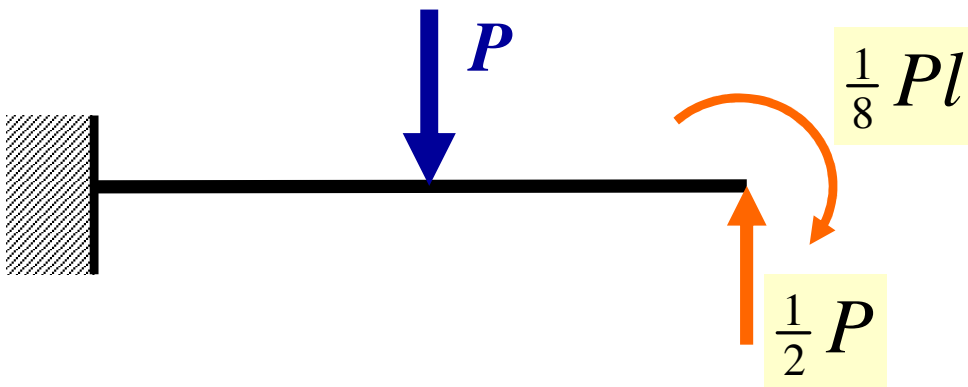
$$\frac{-5Pl^3}{48EJ_y} + \frac{l^3}{3EJ_y} \cdot X_1 + \frac{l^2}{2EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{-Pl^2}{8EJ_y} + \frac{l^2}{2EJ_y} \cdot X_1 + \frac{l}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

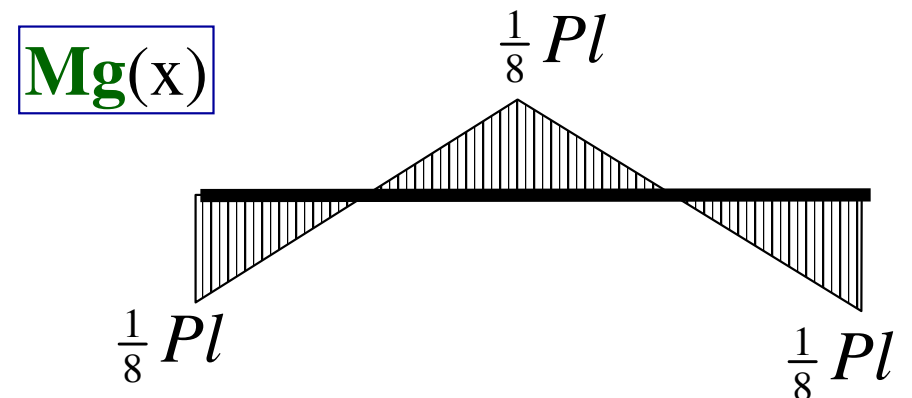
$$X_1 = \frac{1}{2} P$$

$$X_2 = -\frac{1}{8} Pl$$

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY:

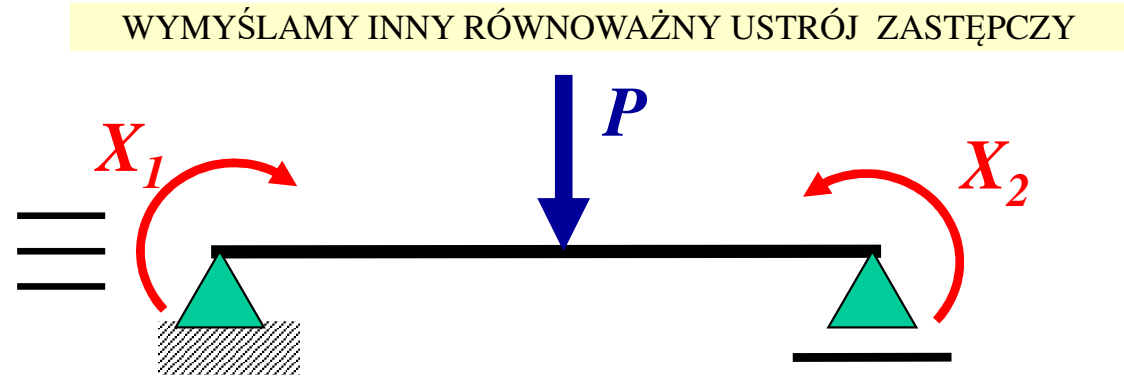
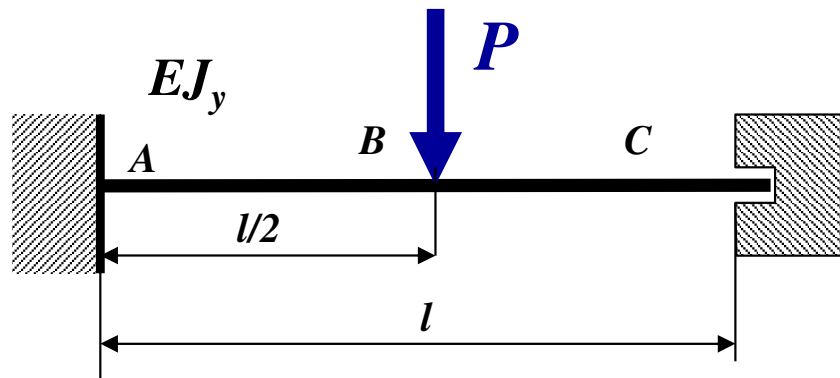


Końcowy rozkład momentu gnącego:

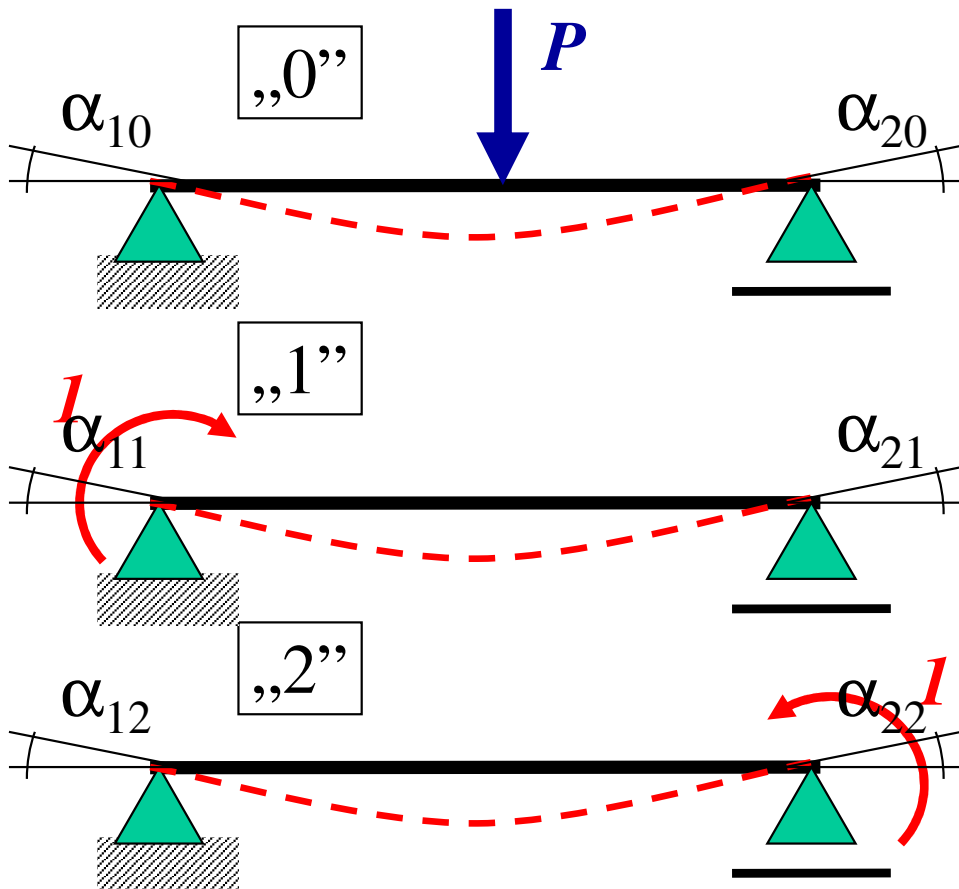


# Metoda sił Maxwella-Mohra

Zad.2. Belka 2 kr.stat. niewyznaczalna



SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

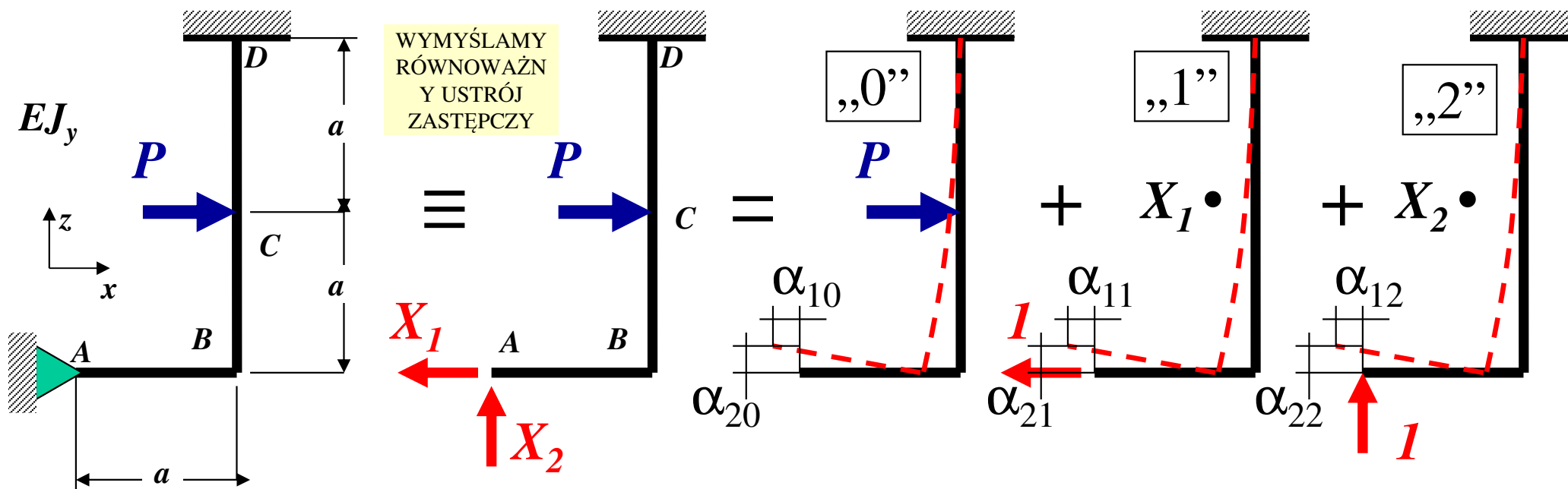
•  $X_1$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

•  $X_2$

# Metoda sił Maxwella-Mohra

Zad.3a. Rama 2 kr.stat. niew.

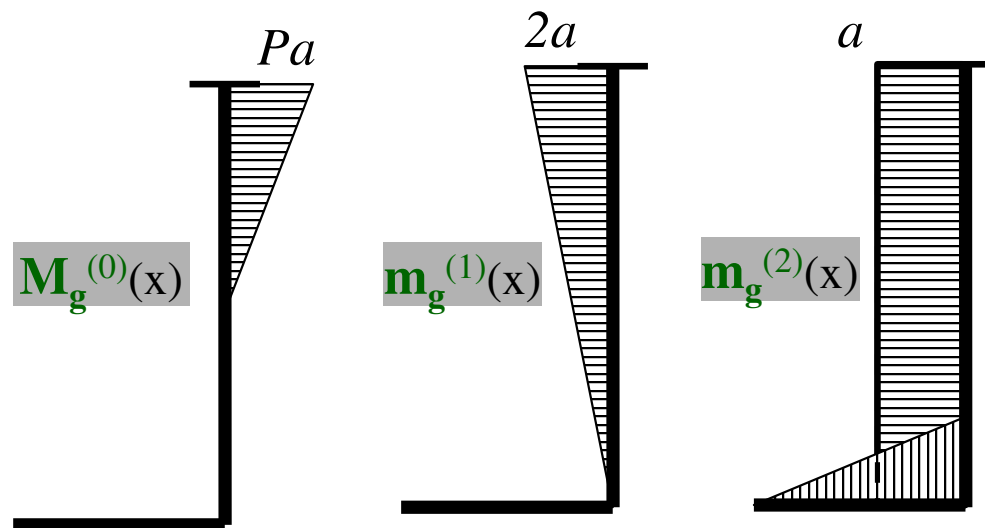


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił M-M



# Metoda sił Maxwella-Mohra

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{2}{3} 2a = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot a = \frac{2a^3}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{7a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{1}{2} Pa^2 \right) \cdot \frac{5}{6} 2a = \frac{-5Pa^3}{6EJ_y}$$

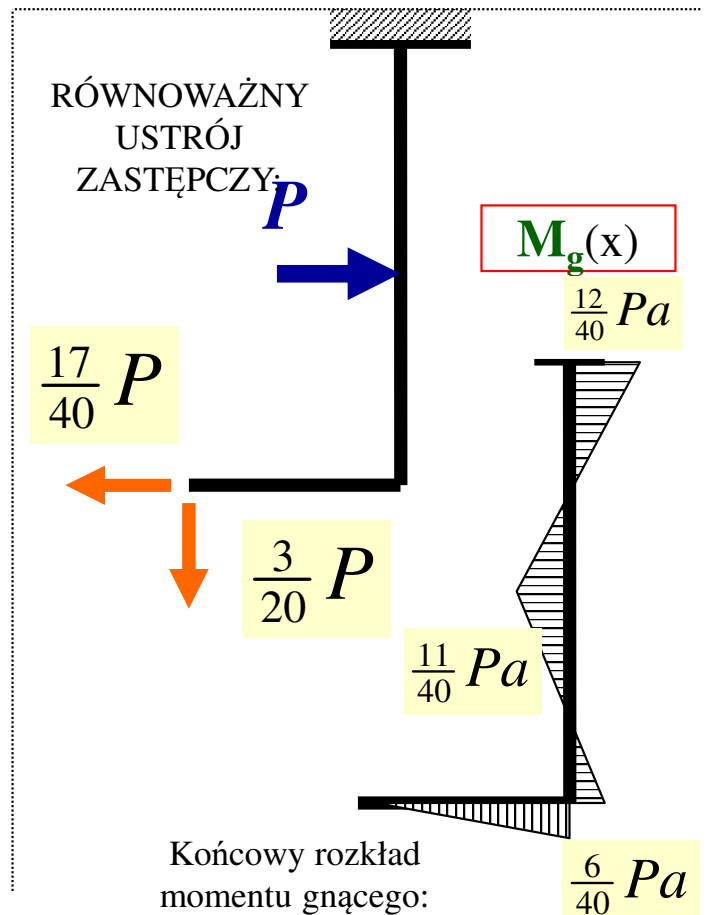
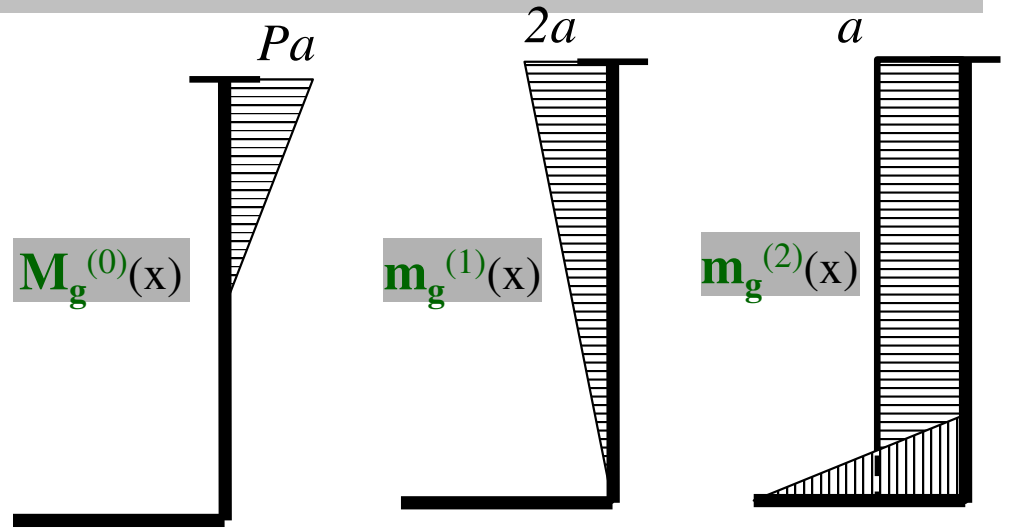
$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{1}{2} Pa^2 \right) \cdot a = \frac{-Pa^3}{2EJ_y}$$

$$\frac{-5Pa^3}{6EJ_y} + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_1 + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$X_1 = \frac{17}{40} P$$

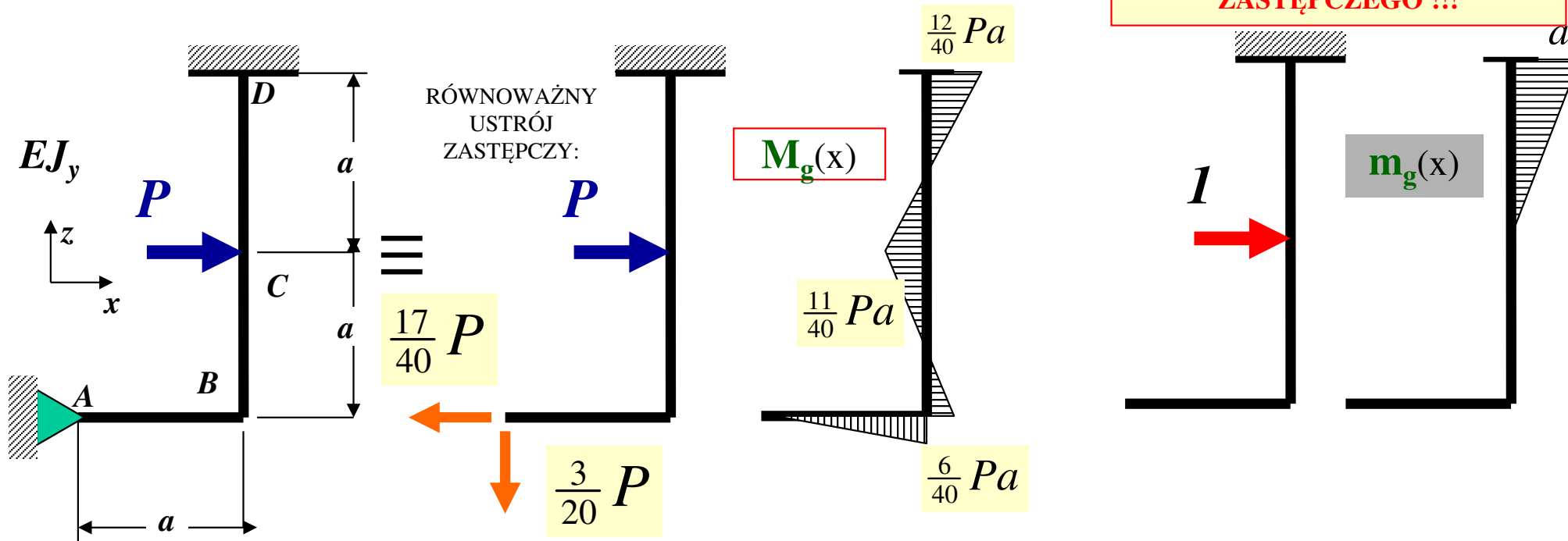
$$\frac{-Pa^3}{2EJ_y} + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{7a^3}{3EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$X_2 = -\frac{3}{20} P$$



# Wyznaczanie przemieszczeń w zadaniach statycznie niewyznaczalnych

Zad.3b. Znaleźć przemieszczenie poziome p.C



$$u_C \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds \stackrel{\text{t.W.}}{=} \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{40} Pa - \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{40} Pa \right) = \frac{13Pa^3}{240EJ_y}$$